Réduction de Jordan (par la dualité)

Notations/Définitions :

- Si E est un espace vectoriel normé on notera E^* son dual.
- Si $u \in \mathcal{L}(E)$ on notera ${}^t u$ l'application qui à $\varphi \in E^*$ associe $\varphi(u)$.
- Si H est un sous-espace vectoriel de E ou E^* on notera $H^\perp$ pour désigner son orthogonal au sens dual.

Théorème : Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice q (tous les endomorphismes de la suite seront nilpotents d'indice q). Il existe alors une base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup ... \cup \mathcal{B}_d$ telle que

$$\mathrm{Mat}_u \mathcal{B} = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_d \end{pmatrix} \text{ où } J_i = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est carré de taille } \#\mathcal{B}_i.$$

Lemme 1 : Si $x \in E$ est tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$, $\mathcal{B}_{u,x} = (x, u(x), ..., u^{q-1}(x))$ est libre et $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_{u,x})$ est stable par u.

Lemme 2 : Il existe $\varphi \in E^*$ et $x \in E$ tels que $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_{u,x})$ et $G = \mathrm{Vect}(\varphi, {}^t u(\varphi), ..., ({}^t u)^{q-1}(u))^\perp$ soient stables par u. De plus,

$$F \oplus G = E.$$

Rappels :

- $\dim(E) = \dim(H) + \dim(H^\perp)$ (considérer une base $(e_1, ..., e_d)$ de F puis $(e_1^*, ..., e_d^*)$ la base duale. On complète la base duale avec $(e_{d+1}^*, ..., e_n^*)$ et on montre ensuite que c'est une base de $H^\perp$)
- Si H est stable par ${}^t u$ alors $H^\perp$ est stable par u (en effet si $x \in H^\perp$ et $\psi \in H, \psi(u(x)) = {}^t u(\psi)(x) = 0$ car ${}^t u(\psi)$ par hypothèse donc $x \in H^\perp$).

Preuve du lemme 1 : Par l'absurde, supposons $\mathcal{B}_{u,x}$ liée. Il existe alors $\lambda_0, ..., \lambda_{q-1}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x) = 0.$$

Soit $p = \min\{k : \lambda_k \neq 0\}$ (qui existe par hypothèse et $p \leq q-2$). On a alors

$$u^{q-1-p}\left(\sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x)\right) = 0 = \lambda_p u^{q-1-p+p},$$

mais $u^{q-1}(x) \neq 0$ donc $\lambda_p = 0$, absurde. Ainsi $\mathcal{B}_{u,x}$ est libre donc $F = \text{Vect}(\mathcal{B}_{u,x})$ est de dimension q.
La stabilité vient de la nilpotence de q. $\square$

Preuve du lemme 2 : On peut voir que $({}^t u)^k = {}^t (u^k)$ donc ${}^t u$ est aussi nilpotent d'indice q. On peut donc se donner un élément $\varphi \in E^*$ et $x \in E$ tel que $({}^t u)^k(\varphi)(x) \neq 0$. On a donc $u^{q-1}(x) \neq 0$.

De la même manière que précédemment, $H = \text{Vect}(\varphi, {}^t u(\varphi), ..., ({}^t u)^{q-1}(u))$ est stable par ${}^t u$ car ${}^t u$ est nilpotent donc $F^{\perp}$ est stable par u (cf rappels). Soit $G = H^{\perp}$. Comme $\dim(F) + \dim(G) = \dim(F) + (n - \dim(H)) = n$ (car H et F sont de dimension q), il suffit de voir que l'intersection est triviale pour avoir $F \oplus G = E$.

Soit $y = \displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x) \in F \cap G$. Comme g est stable par u, $u^{q-1}(y) = \lambda_0 u^{q-1}(x) \in G$ donc $\varphi(\lambda_0 u^{q-1}(x)) = 0 = \lambda_0 \varphi(u^{q-1}(x)) = 0$. Comme $\varphi(u^{q-1}(x)) \neq 0$, nécessairement $\lambda_0 = 0$. En itérant ce procédé (on applique u^{q-2} pour trouver $\lambda_1 = 0$ etc.) il vient $y = 0$. $\square$

Preuve du théorème : On procède par récurrence sur n, la dimension de E. Si $n = 1$ c'est ok. Supposons donc le résultat vrai pour tout evn de dimension $n = 1, .., n-1$ et soit E de dimension n. Si $q = n$ c'est bon, il y a un unique bloc de Jordan. Sinon, le lemme 2 (on garde ses notations) nous donne l'existence d'un $x \in E$ et d'un $\varphi \in E^*$ tels que si on note $\mathcal{B}_G$ une base de G on sait

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_{u,x} \cup \mathcal{B}_G} u = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix},$$

où J est le bloc de Jordan qui correspond à Vect$(B_{u,x})$ et A est une matrice nilpotente car $u_{|G}$ est nilpotent comme restriction d'un endomorphisme nilpotent. Les matrices nulles sur l'antidiagonales viennent du fait que notre espace est décomposé en deux sous-espaces *stables* par u.
L'hypothèse de récurrence utilisée sur A (ou plutôt sur son endomorphisme associée) permet de conclure !$\square$

Remarques importantes :

- Ce n'est pas nécessaire de démontrer toutes les petites propriétés sur le dual mais je pense que c'est bien de les connaître.